Der neue Radweg

Klasse 5-9

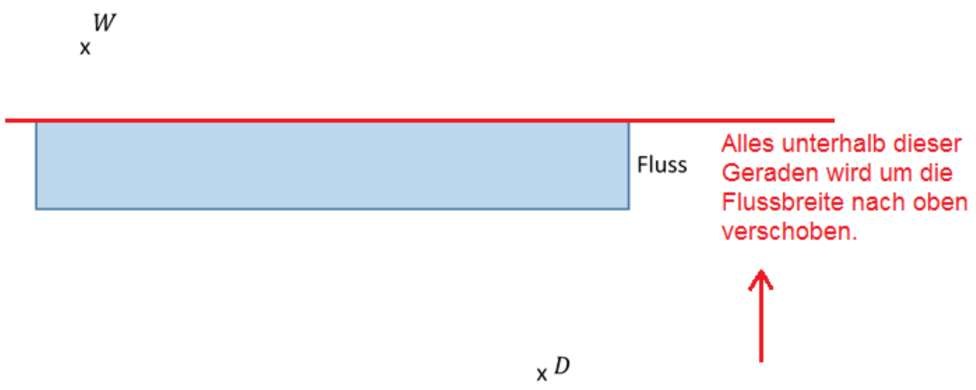
Die kürzeste Verbindung zwischen Waldrestaurant und Denkmal ist die direkte, also die Luftlinie. Da jedoch der Fluss nur senkrecht zum Ufer überquert werden darf, kann der Radweg so nicht angelegt werden.

Die Brücke ist so lang wie die Flussbreite, egal wie der Radweg am Ende aussieht. Man kann die Brücke also erst einmal „ignorieren“ und das Problem damit reduzieren. Das tut man, indem man das südliche Flussufer soweit Richtung Norden verschiebt, dass es auf dem nördlichen Flussufer liegt. Der Fluss ist nun also nur noch eine Linie. Bei dieser Verschiebung muss aber alles unterhalb des Flusses „mitverschoben“ werden (mathematisch spricht man von einer Parallelverschiebung der einen Halbebene um die Flussbreite).

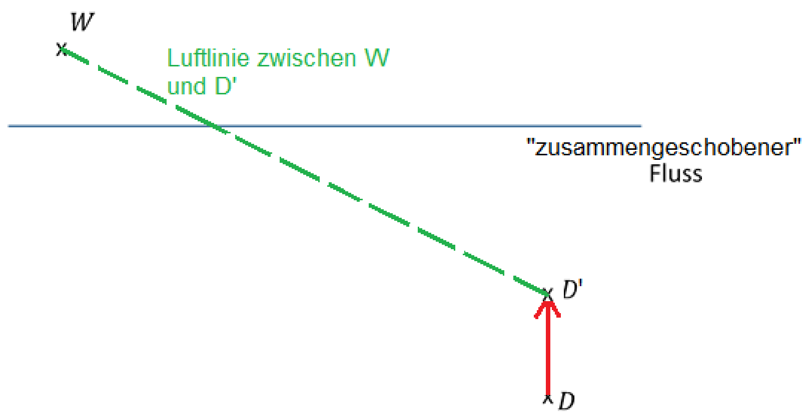
Der Fluss ist jetzt erstmal verschwunden und wir können Waldrestaurant und Denkmal direkt verbinden (Luftlinie).

Zum Abschluss muss der Fluss wieder eingefügt werden, dazu macht man die Verschiebung wieder rückgängig. Die einzelnen Schritte dieser Lösung sind hier grafisch dargestellt:

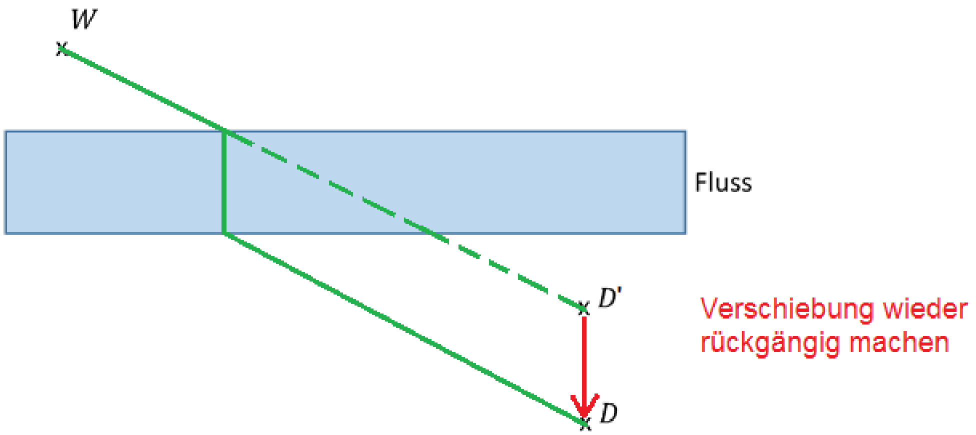
Schritt 1:



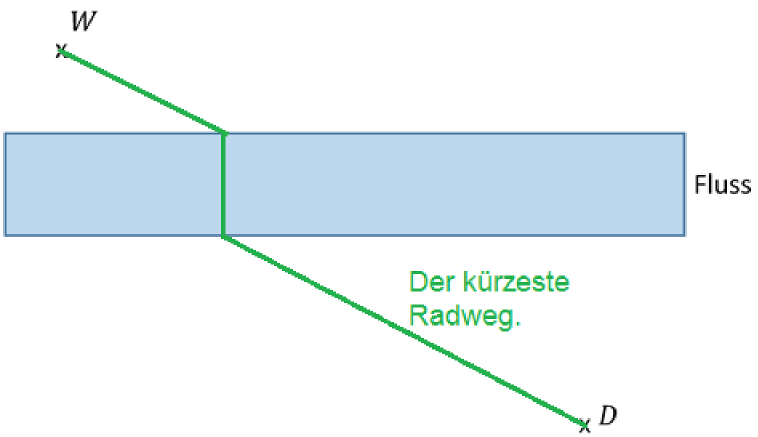
Schritt 2:



Schritt 3:

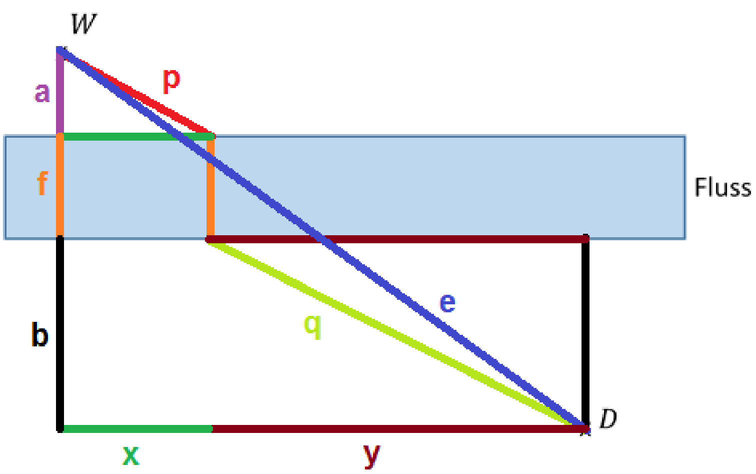


Schritt 4:



<u>Klasse 10-12</u>

Zuerst wird eine Skizze angelegt, in der die gegebenen Strecken (a, b, f und e) sowie weitere Hilfsstrecken (p, q, x und y) eingezeichnet werden:



Gesucht ist die Gesamtstrecke s. Aus der Skizze lässt sich ablesen: $s = p + f + q$. (Gl. 1)

Es müssen also p und q bestimmt werden. Der Ansatz hierfür ist jeweils eine Anwendung des Satzes des Pythagoras:

$a^2 + x^2 = p^2 \Longrightarrow p = \sqrt{a^2 + x^2}$ (Gl. 2) und

$b^2 + y^2 = q^2 \Longrightarrow q = \sqrt{b^2 + y^2}$ (Gl. 3).

Zur Berechnung fehlen jedoch noch x und y. Zur Bestimmung von y lässt sich erneut der Satz des Pythagoras anwenden:

$(a + f + b)^2 + (x + y)^2 = e^2 \Longrightarrow y = \sqrt{e^2 - (a + f + b)^2} - x$ (Gl. 4).

Dieser Ausdruck für y wird nun in Gleichung 3 eingesetzt:

$q = \sqrt{b^2 + y^2} = \sqrt{b^2 + \left(\sqrt{e^2 - (a + f + b)^2} - x\right)^2}$ (Gl. 3a).

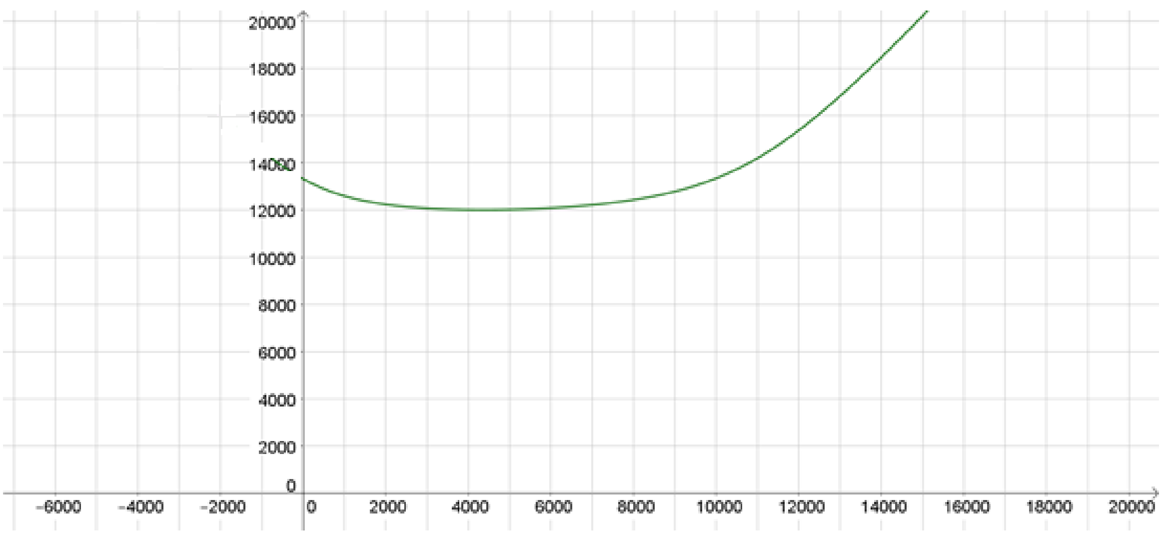
Abschließend werden Gl. 2 und Gl. 3a (also die Ausdrücke für p und q) in Gl. 1 eingesetzt:

$s = p + f + q = \sqrt{a^2 + x^2} + f + \sqrt{b^2 + \left(\sqrt{e^2 - (a + f + b)^2} - x\right)^2}$ (Gl. 1a).

Mit den gegebenen Werten $a = 2000$, $b = 3000$, $f = 15$ und $e = 12000$ (Angaben in m) erhält man folgende Gleichung:

$$s = \sqrt{4000000 + x^2} + \sqrt{9000000 + (10901{,}82439 - x)^2} + 15$$

Der funktionale Zusammenhang $s = s(x)$ mit $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ kann grafisch dargestellt werden (mit dem GTR oder dynamischer Geometriesoftware):



Da der kürzeste Radweg s gesucht ist, muss das Minimum der Funktion im „sinnvollen" Definitionsbereich bestimmt werden. Dieses hat die Koordinaten $(4360{,}73|12008{,}73899)$.

Aus diesen Koordinaten lassen sich zwei Informationen ablesen: Zum einen die genaue Position, an der sich die Brücke befindet (x-Wert), zum anderen die Länge des kürzt möglichsten Radweges (s-Wert).

Ergebnis:

Die Länge des optimalen Radweges für die gegebenen Streckenlängen beträgt ca. 12009 Meter. Der Weg ist also nur etwa 9 Meter länger als die Luftlinie zwischen Waldrestaurant und Denkmal.

(Fe)