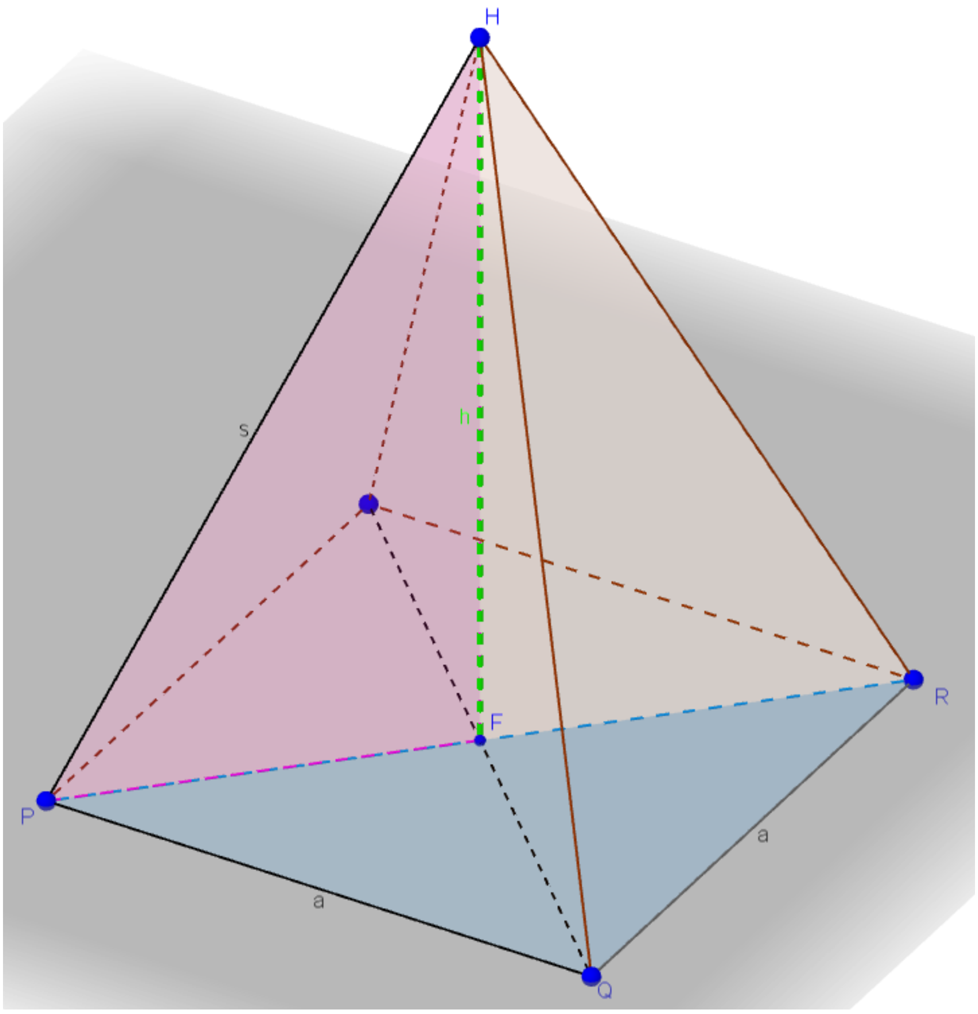
Berechnungen an einer Pyramide

Klasse 5-9

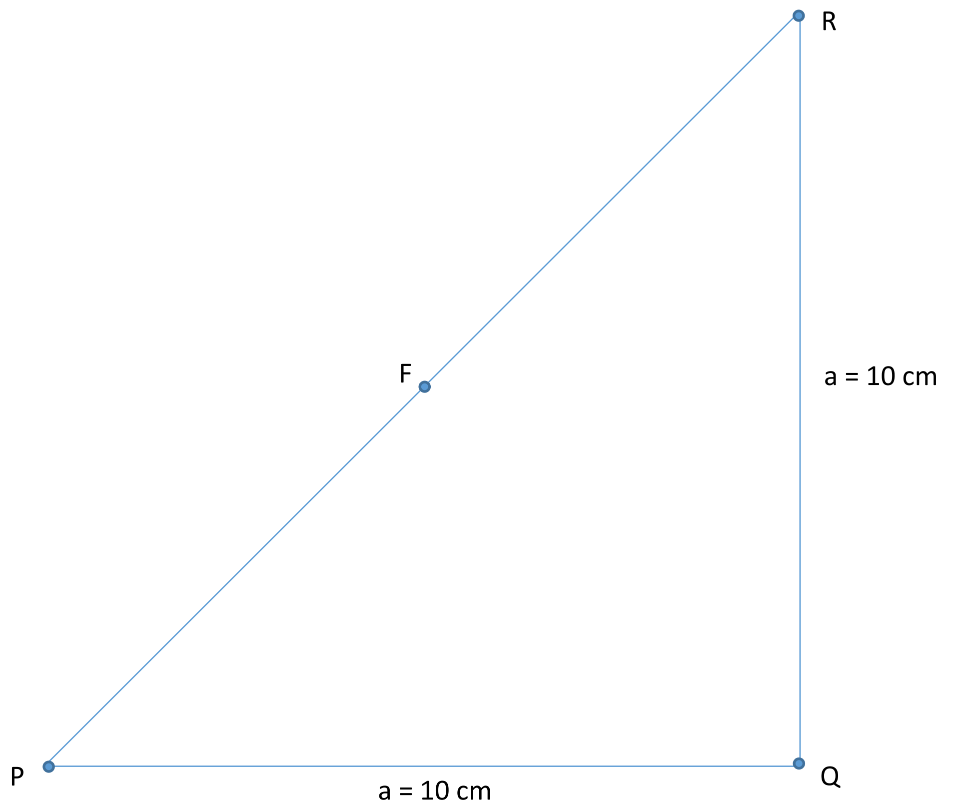
Gesucht ist die Höhe h der Pyramide. Sie ist als grün gestrichelte Strecke in folgender Abbildung eingezeichnet.



Da die Grundfläche der Pyramide quadratisch ist, liegt der Punkt F genau in der Mitte der Grundfläche. Um den Abstand zwischen P und F zu bestimmen, schauen wir uns das blaue Dreieck ΔPQR an. Wir kennen die Längen der beiden kurzen Seiten (nämlich a) und wissen, dass zwischen ihnen ein rechter Winkel liegt. Das blaue Dreieck kann also gut gezeichnet werden.

Man kann die Länge der Strecke von P nach R nun entweder abmessen oder (falls schon bekannt) mit dem Satz des Pythagoras berechnen. Auf diese Weise ermittelt man, dass die Strecke von P nach R etwa $14{,}14\ cm$. Da wie oben gesagt der Punkt F genau in der Mitte der Grundfläche liegt, halbiert er die Strecke von P nach R.

Die Strecke von P nach F ist also ca. $7{,}07\ cm$ lang.

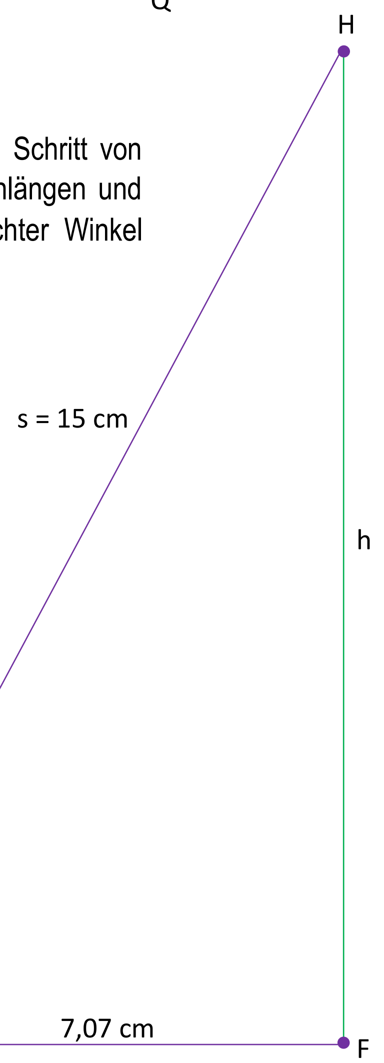


Zuletzt betrachtet man noch das violette Dreieck. Durch den Schritt von gerade eben kennen wir auch in diesem Dreieck zwei Seitenlängen und wissen, dass von den beiden Strecken $\overline{PF}$ und h ein rechter Winkel aufgespannt wird.

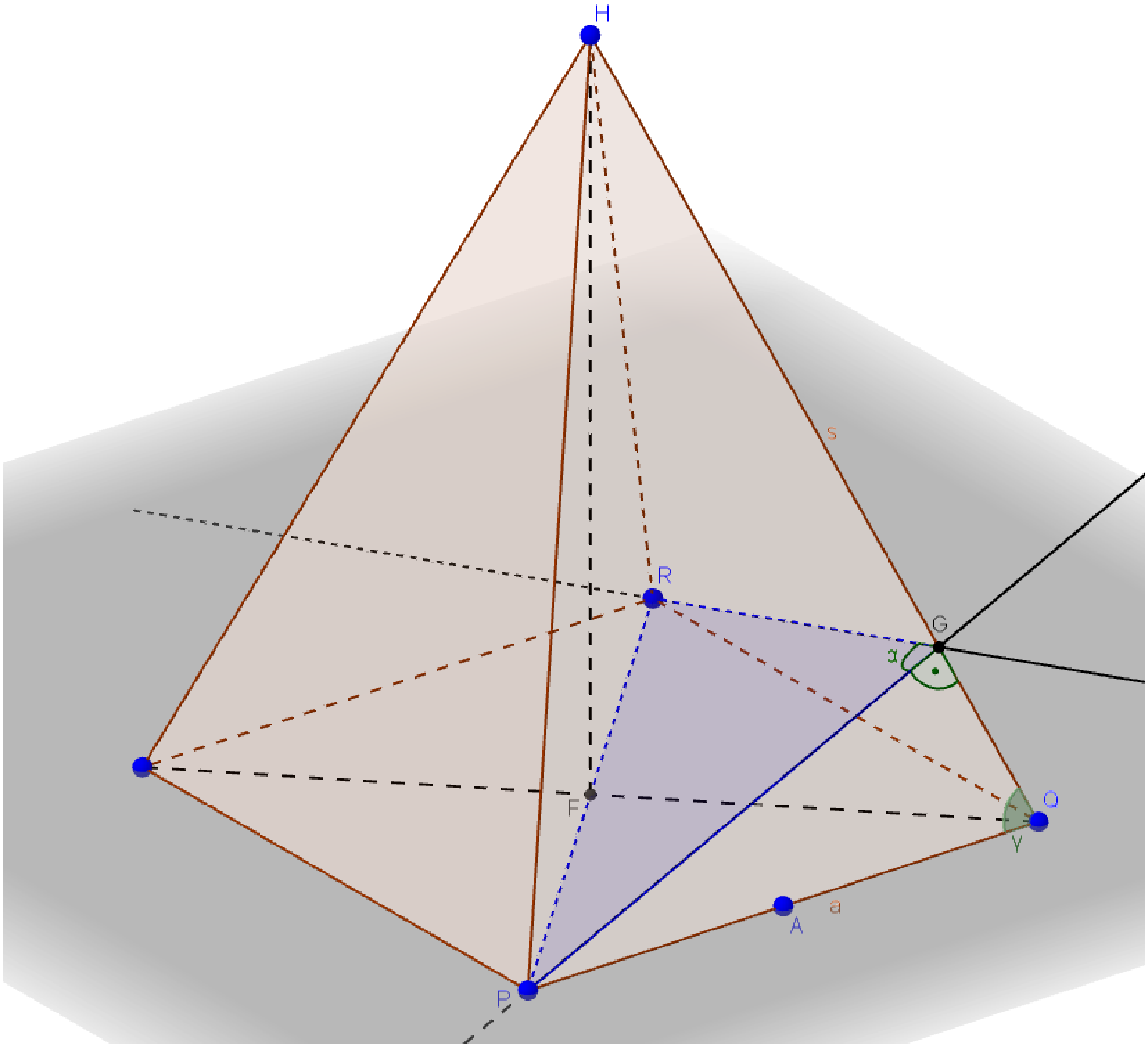
Auch dieses Dreieck kann nun gezeichnet werden:

Man kann nun h entweder mit einem Lineal oder Geodreieck abmessen oder mit dem Satz des Pythagoras berechnen. Auf diese Weise erhält man die Lösung $h \approx 13{,}23\ cm.$

Der Karton muss also mindestens 13,23 cm hoch sein, damit die Pyramide aufrecht eingepackt werden kann.



Klasse 10-12



Eine Möglichkeit der Lösung ist die Konstruktion eines Dreiecks im Inneren der Pyramide, sodass eine Dreiecksseite identisch mit einer Diagonalen der Pyramidengrundfläche ist. Der dritte Eckpunkt des Dreiecks liegt auf einer der Seitenkanten der Pyramide, die keinen Schnittpunkt mit der verwendeten Diagonalen der Grundfläche hat. Dabei wird dieser dritte Punkt so gelegt, dass die beiden Seiten des Dreiecks, die auf den Seitenflächen der Pyramide liegen, mit der Seitenkante, auf der der dritte Eckpunkt des Dreiecks liegt, jeweils einen rechten Winkel einspannen.

Dieses konstruierte Dreieck ist blau in obiger Abbildung eingezeichnet.

Darüber hinaus wird Punkt A eingetragen: Er halbiert die Strecke $\overline{PQ}$.

Betrachte nun das rechtwinklige Dreieck ΔAQH. Hier lässt sich der Winkel γ mithilfe der trigonometrischen Funktionen bestimmen:

$$\cos(\gamma) = \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{QH}|} = \frac{\frac{1}{2}a}{s} = \frac{a}{2s}$$

$$\Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{a}{2s}\right) \qquad (Gl.1)$$

[HINWEIS ZUR SCHREIBWEISE: Während mit $\overline{AB}$ die Strecke von A nach B (also ein geometrisches *Objekt*) gemeint ist, steht $|\overline{AB}|$ (sprich: Betrag von $\overline{AB}$) für die *Länge* der Strecke $\overline{AB}$.]

Im nächsten Schritt wird das Dreieck ΔPQG betrachtet. Auch dies ist rechtwinklig, sodass sich die Länge der Strecke $\overline{PG}$ erneut mithilfe der Trigonometrie bestimmen lässt:

$$\sin(\gamma) = \frac{|\overline{PG}|}{|\overline{PQ}|} = \frac{|\overline{PG}|}{a}$$

$$\Rightarrow |\overline{PG}| = a \cdot \sin(\gamma)$$

In dieses Ergebnis kann nun Gleichung (1) eingesetzt werden, denn darin haben wir γ schon berechnet:

$$|\overline{PG}| = a \cdot \sin\left(\arccos\left(\frac{a}{2s}\right)\right) \qquad (Gl.2)$$

Für den letzten Schritt wird das Dreieck ΔPGF betrachtet. Dabei sei F der Punkt, der die Strecke $\overline{PR}$ halbiere. Aus Symmetriegründen bei der Pyramide mit quadratischer Grundfläche liegt in dem Dreieck bei Punkt F ein rechter Winkel vor und der Winkel bei Punkt G beträgt $\frac{\alpha}{2}$ (α sei der gesuchte Winkel, der von zwei an einer Seitenkante angrenzenden Seitenflächen aufgespannt wird, s. Abb.).

Es ergibt sich mithilfe der Trigonometrie:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{|\overline{FP}|}{|\overline{PG}|} \qquad (Gl.3)$$

Die Länge der Strecke $\overline{FP}$ entspricht der halben Länge der Grundflächendiagonalen $\overline{PR}$. Mit dem Satz des Pythagoras berechnet man:

$$|\overline{PR}|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\Rightarrow |\overline{PR}| = \sqrt{2}a$$

Also ist $|\overline{FP}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{PR}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Dies sowie der Ausdruck für $|\overline{PG}|$ aus Gleichung (2) wird nun in Gleichung (3) eingesetzt. Man erhält:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{|\overline{FP}|}{|\overline{PG}|} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a \cdot \sin\left(\arccos\left(\frac{a}{2s}\right)\right)} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sin\left(\arccos\left(\frac{a}{2s}\right)\right)}$$

Diese Gleichung wird abschließend nach α aufgelöst. Man erhält das Ergebnis:

$$\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sin\left(\arccos\left(\frac{a}{2s}\right)\right)}\right)$$

Mit den gegebenen Werten $a = 10\ cm$ und $s = 15\ cm$ erhält man den Winkel $\alpha \approx 97{,}18°$.

(Fe)