Badewannen, Bücher, Boote

Klasse 5-6

Die Badewanne füllt sich bei eingestecktem Stöpsel vollständig in zwei Minuten, also ist die Wanne nach einer Minute halbvoll. Zieht man bei einer vollen Wanne den Stöpsel, so leert sie sich innerhalb von drei Minuten, also jede Minute um ein Drittel des Gesamtvolumens. Geschieht das Befüllen und das Entleeren der Wanne nun gleichzeitig, so ist nach einer Minute eine Hälfte minus ein Drittel (also ein Sechstel) der Wanne gefüllt. Daher dauert es sechs Minuten, bis die Badewanne ganz gefüllt ist.

Eine etwas andere und deutlich kürzere Lösung: In sechs Minuten kann sich die Badewanne dreimal füllen, aber nur zweimal leeren.

Klasse 7-9

Da das Buch mit Seite 1 beginnt, gibt es 9 einstellige Seitenzahlen (nämlich 1,2,3,4,5,6,7,8,9). Anschließend folgen die zweistelligen Seitenzahlen von 10 bis 99, d.h. es gibt genau 90 Seitenzahlen, für die man je zwei Ziffern benötigt. Für die Seitenzahlen von 1 bis 99 braucht man also $9 + 2 \cdot 90 = 189$ Ziffern.

Angenommen, das Buch habe eine dreistellige Seitenzahl, die wir x nennen.

Von 100 bis zu x sind es $x - 99$ Seitenzahlen. Da diese Zahlen jeweils dreistellig sind, benötigt man für sie $3 \cdot (x - 99)$ Ziffern.

Insgesamt werden für die Seitenzahlen von 1 bis x also $189 + 3 \cdot (x - 99)$ Ziffern benötigt. Wir wissen, dass für die Nummerierung des Buches insgesamt 2010 Ziffern gebraucht wurden, also muss zur Berechnung von x folgende Gleichung gelöst werden: $189 + 3 \cdot (x - 99) = 2010$. Tut man dies fehlerlos, so erhält man als Ergebnis die Lösung $x = 706$. Das Buch hat also 706 Seiten.

Klasse 10-11

Ja, es gibt einen solchen Abschnitt von genau 50 km Länge.

Zur Begründung der Entscheidung teilt man die 6000 km lange Route in 120 gleichgroße Abschnitte ein. Diese haben dann jeweils eine Länge von 50 km. Es kann durchaus sein, dass das Schiff für einen dieser Abschnitte genau eine Stunde gebraucht hat. In diesem Fall ist die Aussage bewiesen.

Im wahrscheinlicheren Fall legt das Schiff jedoch keinen der Abschnitte in genau einer Stunde zurück. Als Konsequenz daraus gibt es Abschnitte, in denen das Schiff mehr als eine Stunde gebraucht hat und Abschnitte, die es in weniger als einer Stunde durchquert hat. Zwangsweise grenzen mindestens zwei dieser Abschnitte mit zum einen niedrigerer Zeit und zum anderen höherer Zeit direkt aneinander.

Im Folgenden werden zwei solch aneinandergrenzende Abschnitte betrachtet. Man stelle sich einen Maßstab von 50 km Länge vor, der an den Abschnitt gelegt wird, für den das Schiff mehr als eine Stunde benötigt hat. Anschließend wird er langsam in den benachbarten Abschnitt hineingeschoben. Während des Verschiebens bleibt zwar die Streckenlänge von 50 km gleich (da der Maßstab seine Länge nicht ändert); die Zeit, die das Schiff zum Durchqueren des Maßstab-Bereiches benötigt, wird jedoch immer geringer: Am Ende des Verschiebevorgangs deckt der Maßstab genau den 50 km langen Abschnitt ab, für den das Schiff weniger als eine Stunde gebraucht hat.

Als logische Konsequenz daraus muss es während des stetigen Verschiebevorgangs eine Position des Maßstabs gegeben haben, welche die Strecke markiert, für deren Durchquerung das Schiff exakt eine Stunde benötigt hat. Dies ist die gesuchte Situation, d.h. auch für diesen Fall (und damit insgesamt) ist die Aussage bewiesen.

(Fe)