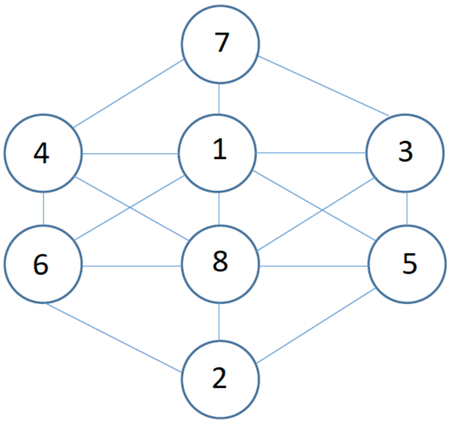
Klasse 5-6

Die Strategie ist es hier, die beiden Zahlen, die nur einen Nachbarn haben (also 1 und 8) in die mittleren beiden Felder einzutragen, da von diesen die meisten Verbindungen ausgehen. Durch die Eintragung der 1 und 8 in die mittleren Felder ist die Position der Zahlen 2 und 7 automatisch vorgegeben: Es gibt jeweils nur ein Feld, das nicht mit der 1 bzw. der 8 verbunden ist.

Hat man nun die 1,2,7 und 8 eingetragen, ergibt sich zwangsläufig und automatisch die richtige Reihenfolge:



Klasse 7-10

Der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich aus dessen Grundseite g_h sowie dessen Höhe h mit folgender Formel: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g_h \cdot h$.

Für ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a gilt der Spezialfall $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$ (dabei ist h die Höhe) und damit für den Flächeninhalt: $A_{\Delta_a} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$.

Der Flächeninhalt des großen Dreiecks, das gegeben ist, beträgt demnach $A_{\Delta_6} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 = \sqrt{3} \cdot 9$.

Die zwei mittleren Dreiecke mit Seitenlänge 4 haben jeweils den Flächeninhalt $A_{\Delta_4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = \sqrt{3} \cdot 4$.

Und der Flächeninhalt des kleinen Dreiecks beträgt $A_{\Delta_2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}$.

Die drei kleineren Dreiecke haben zusammen also den Flächeninhalt $2 \cdot A_{\Delta_4} + A_{\Delta_2} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 + \sqrt{3} = 8 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} = 9\sqrt{3} = A_{\Delta_6}$.

Das bedeutet, dass der Flächeninhalt der drei kleinen Dreiecke zusammen genauso groß ist wie der Flächeninhalt des großen Dreiecks.

Die weißen Flächen, die der Fläche des großen Dreiecks „abgezogen“ werden, werden auch den kleineren Dreiecken abgezogen. Man „entfernt“ also genauso viel Fläche von der Fläche des großen Dreiecks wie von der Gesamtfläche der drei kleineren Dreiecke.

Damit wurde gezeigt, dass die gestreifte Fläche genauso groß ist wie die karierte.

Klasse 11-12

Eine Aussage über die gesuchten Wahrscheinlichkeiten lässt sich treffen, wenn man die Anzahl der günstigen Ergebnisse durch die Anzahl der möglichen Ergebnisse teilt. Dies ist aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Klasse 8 bekannt und wird am folgenden Beispiel illustriert:

> *[EXKURS: Ein fairer Spielwürfel (6 Seiten) lässt beim einmaligen Würfeln folgende Ergebnisse zu: 1,2,3,4,5 und 6. Die Menge aller dieser möglichen Ergebnisse heißt Ergebnismenge und trägt in der Regel den Namen Ω, hier also: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.*
>
> *Soll das Ereignis „es wird eine gerade Zahl gewürfelt" betrachtet werden, so teilt man die Anzahl der günstigen Ergebnisse (also 2, 4 und 6) durch die der möglichen Ergebnisse (1,2,3,4,5,6) und erhält als Quotienten die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(\text{"gerade Zahl würfeln"}) = \frac{3}{6} = 50\%$.]*

Im ersten Szenario bemerkt man, dass der Mitspieler (mindestens) ein Ass erhalten hat. Die Anzahl der möglichen Kartenkonstellationen, die er damit besitzen kann, wird mit m_1 bezeichnet und ergibt sich folgendermaßen: Von allen Möglichkeiten, „10 aus 32" Karten zu erhalten, müssen diejenigen abgezogen werden, in denen kein einziges Ass auftaucht:

$$m_1 = \binom{32}{10} - \binom{28}{10} = \frac{32!}{10! \cdot (32-10)!} - \frac{28!}{10! \cdot (28-10)!}$$

$$= \frac{32!}{10! \cdot 22!} - \frac{28!}{10! \cdot 18!} = 51\,389\,130$$

Es gibt für den Mitspieler also 51 389 130 mögliche Kartenkonstellationen, die mindestens ein Ass beinhalten. m_1 ist damit die Anzahl der möglichen Ergebnisse.

Da die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht wird, dass der Mitspieler mehr als ein Ass besitzt, müssen von allen möglichen Kartenkonstellationen mit mindestens einem Ass noch diejenigen ausgeschlossen werden, bei denen er nur genau ein Ass auf der Hand hält:

$$g_1 = m_1 - \binom{4}{1} \cdot \binom{28}{9} = 51\,389\,130 - 27\,627\,600 = 23\,761\,530$$

Damit ist g_1 die Anzahl der günstigen Ergebnisse.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Mitspieler auch noch ein zweites Ass auf der Hand hat, beträgt mit der Argumentation aus dem obigen Exkurs daher

$$P_1(\text{"zweites Ass"}) = \frac{g_1}{m_1} = \frac{23\,761\,530}{51\,389\,130} \approx 0{,}462 = \mathbf{46{,}2}\%.$$

Im zweiten Szenario weiß man noch mehr, nämlich nicht nur, *dass* der Mitspieler ein Ass auf der Hand hat, sondern darüber hinaus auch, *welches* der vier Asse es ist. Mathematisch ist dies ein gravierender Unterschied, wie man im Folgenden sehen wird.

Auch hier soll zuerst die Anzahl der möglichen Ergebnisse m_2 bestimmt werden. Da eine Karte des Mitspielers bereits festgesetzt ist (z.B. das Herz-Ass), müssen für dessen restlichen Karten „9 aus 31" ausgewählt werden. Die Anzahl der möglichen Kartenkonstellationen berechnet sich damit zu

$$m_2 = \binom{31}{9} = 20\,160\,075.$$

Eine deutlich geringere Zahl als m_1, die bei genauerer Überlegung aber nicht überrascht: Es gibt natürlich viel mehr mögliche Kartenkonstellationen aus 10 Karten, bei denen eine Karte aus einem „Pool“ von vier Karten genommen werden muss, als bei 10 Karten, bei denen eine Karte genau festgelegt ist.

Gesucht ist noch die Anzahl der günstigen Ergebnisse g_2, also der Fälle, bei denen der Mitspieler ein weiteres Ass auf der Hand hat. Das heißt, von der Gesamtheit der möglichen Fälle m_2 müssen diejenigen abgezogen werden, bei denen der Mitspieler kein weiteres Ass auf der Hand hat.

„Kein weiteres Ass auf der Hand“ würde bedeuten, dass die 9 weiteren Karten aus den 28 Karten gezogen werden müssen, die keine Asse sind.

$$g_2 = m_2 - \binom{28}{9} = 20\,160\,075 - 6\,906\,900 = 13\,253\,175.$$

Damit berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für eine zweites Ass des Mitspielers analog zum ersten Szenario:

$$P_2(\text{"zweites Ass"}) = \frac{g_2}{m_2} = \frac{13\,253\,175}{20\,160\,075} \approx 0{,}657 = \mathbf{65{,}7}\%.$$

In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit für ein zweites Ass also deutlich höher als im ersten – eine Feststellung, die jedem Nicht-Mathematiker erst einmal paradox erscheint, sich aber durch eine geschickte mathematische Argumentation einleuchtend begründen lässt.

(Fe)