Sichern und Vernetzen – Vermischte Aufgaben

Lösungen zu Kapitel 1

44

1 *Ähnliche Vierecke*
Zueinander ähnlich sind A und E, B und H, F und G, H und E. Die Figuren B und H, sowie F und G lassen sich durch Drehung sogar in Deckung bringen.

2 *Ähnliche Dreiecke*
a) Der Winkel γ ergibt sich aus der Winkelsumme im Dreieck und hat damit einen Wert von 90°. Die Dreiecke sind ähnlich zueinander.
b) Nein. Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

3 *Würfelvolumina*
Es ist $V_2 = (2\,\text{cm})^3 = 8\,\text{cm}^3$. Damit ergibt sich $V_4 = 2^3 \cdot V_2 = 64\,\text{cm}^3$ und $V_6 = 3^3 \cdot V_2 = 216\,\text{cm}^3$. Alternativ berechnet man V_4 und V_6 durch unmittelbares Einsetzen der Seitenlänge in die bekannte Volumenformel für den Würfel.

4 *Messprobleme*
a) $\frac{50\,\text{m}}{80\,\text{m}} = \frac{x}{40\,\text{m}}$; $x = 25\,\text{m}$ b) $\frac{13\,\text{m}}{25\,\text{m}} = \frac{x}{75\,\text{m}}$; $x = 39\,\text{m}$

5 *Ansatz finden*
Linkes Bild: $\frac{9}{4+x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 8$
Mittleres Bild: $\frac{12}{4{,}8} = \frac{x}{4{,}2} \Leftrightarrow x = 10{,}5$
Rechtes Bild: $\frac{12}{x} = \frac{8}{10} \Leftrightarrow x = 15$

6 *Ähnliche Dreiecke und Vierecke*
a) Das Verhältnis von langer zu kurzer Seite beträgt hier 0,8. Rechtecke, die dies erfüllen, sind z. B. solche mit einer Größe von $8 \cdot 10$, $40 \cdot 50$, $20 \cdot 25$.
b) Es gibt kein einem Rechteck ähnliches Quadrat, da letzteres grundsätzlich ein Seitenverhältnis von 1 : 1 hat.
c) Ja.

45

7 *Ähnliche Dreiecke?*
a) Die Dreiecke sind zueinander ähnlich, der entsprechende Faktor für das Seitenlängenverhältnis beträgt 1,67.
b) Die Dreiecke sind nicht ähnlich, da sie sich im Winkel α unterscheiden.
c) Die Dreiecke sind ähnlich, da sie in allen drei Winkeln übereinstimmen.

8 *Wahr oder falsch?*
a) Richtig sind die Vorschläge 2, 3, 4 und 6. Falsch sind die Vorschläge 1 und 5.
b) Richtig sind die Vorschläge 1,2 und 3. Vorschlag 4 ist falsch.

9 *Vergrößerte Fotos*
a) Das Verhältnis der Seitenlänge beträgt bei Elins Bild ungefähr 1,51. Die entspricht am ehesten einem Foto mit den Maßen $10 \cdot 15$.
b) Als Posterformate eignen sich $30 \cdot 45$, $40 \cdot 60$ und $50 \cdot 75$.

10 *Trapezförmiges Grundstück*
Laut erstem Strahlensatz ist $\frac{25\,\text{m}}{x} = \frac{40\,\text{m}}{40\,\text{m} - x} \Leftrightarrow x \approx 15{,}38\,\text{m}$.

11 *Quadratfigur*
Die 0. Stufe hat einen Flächeninhalt von $A_0 = 729\,\text{cm}^2$. Der Inhalt der n-ten Stufe A_n ergibt sich nun zu $A_n = A_{n-1} + 4 \cdot 3^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot A_0$, also $A_1 = 1053\,\text{cm}^2$, $A_2 = 1161\,\text{cm}^2$, $A_3 = 1197\,\text{cm}^2$.

Lösungen zu Kapitel 2

66

1 *Wo liegt eine Zahl auf der Zahlengeraden?*
$\frac{6}{4} \to$ D; $-\sqrt{0{,}1} \to$ B

2 *Irrational?*
$\sqrt{24}$, $\sqrt{2{,}5}$, $\sqrt{250}$

66

3 *Welche Art von Zahl ist es nun?*
$\sqrt{36}$

4 *Rational oder irrational?*
$\sqrt{121}$, $\sqrt{10000}$, $\sqrt{1000000}$

5 *Quadrieren und Wurzelziehen*
a) 3 b) 5 c) $\frac{2}{81}$ d) 25 e) 6 f) nicht definiert

6 *Rechnen mit Wurzeln*
a) 6 b) 12 c) 1 d) $\frac{6}{3}$ e) 2

7 *Teilweises Wurzelziehen*
a) $2\sqrt{3}$ b) $5\sqrt{3}$ c) $10\sqrt{10}$ d) $\frac{1}{3}\sqrt{15}$ e) $20\sqrt{2}$ f) $2\sqrt{\frac{1}{10}}$

8 *Addition von Wurzeln*
a) $\sqrt{11}$ b) $3\sqrt{11} - 3\sqrt{10}$ c) $3\sqrt{5}$

9 *Multiple Choice – Mehrfach-Auswahl-Antworten*
Die rationalen Zahlen sind genau jene
b) die nicht irrational sind,
c) die als Brüche aus zwei ganzen Zahlen darstellbar sind,

10 *Rechenoperationen und Geometrie*
a) $x \cdot x = x^2 = A$ b) $A : x = \frac{A}{x} = x$

67

11 *Besondere Radikanden*
a) Der Radikand darf nie negativ sein. $\sqrt{-100}$ ist nicht definiert.
b) $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$

12 *Irrationale Zahlen und GTR*
a) Man rechnet mit einer Nachkommastelle, z. B.: $a = 2{,}25 \rightarrow \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$.
b) 58 Nachkommastellen zeigt der Taschenrechner nicht an. Daher könnte man vermuten, dass die Dezimaldarstellung nicht abbrechend und nicht periodisch ist. Mit dieser Vermutung wäre die Zahl irrational.

13 *Verrücktes zu Zahlen*
Eva stellt fest, dass $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ ist.
Das Produkt aus zwei irrationalen Zahlen kann also durchaus eine rationale Zahl sein, ist es jedoch im Allgemeinen nicht.

14 *Vergrößerungsfaktor*
a) $1 : 2$ b) $1 : \sqrt{50}$

15 *Flächenvergrößerung*
Kantenlänge der Quadrate vom kleinsten bis zum größten: 1 m, $\sqrt{2}$ m, $\sqrt{3}$ m, 2 m
Kantenlänge der Quadrate vom kleinsten bis zum größten im Maßstab 1 : 10: 10 cm, 14,41 cm, 17,73 cm, 20 cm

16 *Tsunamis*

Wassertiefe w in m	50	75	100	500	1000	2000	5000	8000
Geschwindigkeit v in km/h	563,47	845,21	1126,94	5634,71	11 269,43	22 538,86	86 347,14	90 155,42

Lösungen zu Kapitel 3

112 **1** *Eigenschaften von Vierecken*

2 Paare paralleler Seiten	2, 3, 4, 5, 6, 11
4 gleich lange Seiten	2, 3, 6
4 rechte Winkel	3, 4, 6
4 gleich lange Seiten und 4 rechte Winkel	3, 6
2 Paare gleich langer, aneinanderstoßende Seiten	2, 3, 6, 7, 10
gegenüberliegende Winkel sind gleich groß	2, 3, 4, 5, 6, 11

Definitionen lassen sich finden, indem man jeweils zu einem Viereck alle erfüllten Eigenschaften sammelt und dann die redudanten Informationen entfernt.

2 *Berechne die fehlende Seite*

a) $c = 15$ b) $a = 5$ c) $b = 24$ d) $b = 45$

3 *Berechnung an Dreiecken*

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
a	**4**	3,9	9,8	3	$\sqrt{5}$
b	**6**	**5**	**5**		$\sqrt{20}$
c	6,9	**8**	**12**	**6**	5
h	3,5	**2**	4		**2**
p	**2**	3,4	**9**		**1**
q	4,9	4,6	3	**2**	**4**

Die Ergebnisse in der Tabelle sind auf eine Nachkommastelle gerundet.
Mit den gegebenen Angaben ist es nicht möglich, Dreieck (4) zu konstruieren, da sich für die Höhe h hier keine reelle Zahl ergibt.
Es handelt sich bei (5) um ein rechtwinkliges Dreieck.

4 *Rechtwinklig oder nicht*

a) Das Dreieck ist nicht rechtwinklig. Wird mit den Seitenlängen a und b gerechnet, müsste $c = 10\,\text{cm}$ lang sein.
b) Das Dreieck ist rechtwinklig. Der Satz des Pythagoras gilt mit den angegebenen Seitenlängen.
c) Das Dreieck ist nicht rechtwinklig. Wird mit den Seitenlängen a und b gerechnet, müsste $c = 7{,}8\,\text{cm}$ lang sein.
d) Das Dreieck ist nicht rechtwinklig. Wird mit den Seitenlängen a und b gerechnet, müsste $c = 0{,}9\,\text{m}$ lang sein.

113 **5** *Abstandsberechnung*

a) Für den Abstand d zweier Punkte im Zweidimensionalen gilt unter Berücksichtigung des Satzes von Pythagoras für die Punkte $P_1(x_1 | y_1)$ und $P_2(x_2 | y_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

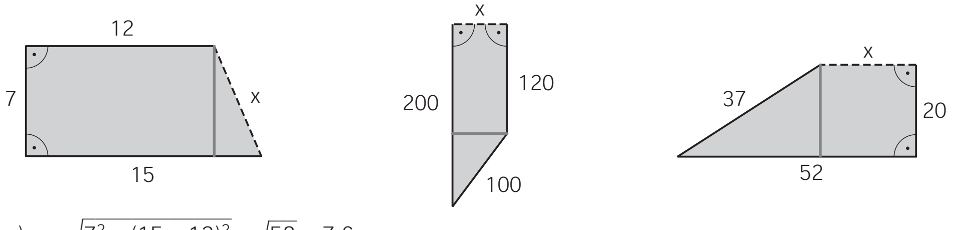
$$c = \overline{AB} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{4 + 9} \approx 3{,}6$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(-5 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{36 + 16} \approx 7{,}2$$

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(-5 - 3)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{64 + 1} \approx 8{,}1$$

b) Überprüfen mit dem Satz des Pythagoras zeigt, dass das Dreieck rechtwinklig ist: $13 + 52 = 65$.

6 *Seitenlänge im Trapez*



a) $x = \sqrt{7^2 + (15 - 12)^2} = \sqrt{58} \approx 7{,}6$
b) $x = \sqrt{100^2 - (200 - 120)^2} = \sqrt{3600} = 60$
c) $d = \sqrt{37^2 - 20^2} = \sqrt{969} \approx 31{,}1$; also ist $x = 52 - d \approx 52 - 31{,}1 = 20{,}9$

113 **7** *Längen im Dreieck*

a) $x = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$

$y + 3 = \sqrt{10^2 - x^2} = \sqrt{84} \approx 9{,}2$

$y = 9{,}2 - 3 = 6{,}2$

b) $x = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 6{,}9$

$y + 4 = \sqrt{12^2 - x^2} = \sqrt{96} \approx 9{,}8$

$y = 9{,}8 - 4 = 5{,}8$

8 *Beweisverfahren im Vergleich*

a) (A) $\frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{22}{15}$

(B) $\sqrt{2} - \left(\frac{2}{5}\right) = 1{,}014213$, das Ergebnis ist irrational. Für dieses Beispiels trifft die Behauptung zu.

b) Da die Behauptungen allgemein formuliert sind und somit für beliebige Zahlen gelten sollen, reicht es nicht als Beweis, sie für eine wenige Beispiele zu bestätigen.

c) In (A) ist die Vorgehensweise direkt, man wählt allgemeine Zahlen, die den Voraussetzungen entsprechen und zeigt die Behauptung dann allgemein. (B) ist ein sogenannter Widerspruchsbeweis. Man geht von der gegenteiligen Behauptung aus und findet einen Widerspruch. Wenn die gegenteilige Behauptung nicht stimmt, weiß man, dass die Behauptung wahr sein muss.

d) (1) Beweis nach Vorgehen in (A): Sei $a = \frac{p}{q}$ und $b = \frac{m}{n}$, dann gilt $a \cdot b = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{p \cdot m}{q \cdot n}$.

(2) Achtung: Die Behauptung ist in Auflage 1 nicht korrekt. Der Quotient muss irrational sein.

Beweis nach Vorgehen in (B): Annahme: $z = \frac{x}{y}$ und z ist rational. Dann ist $x = y \cdot z$ nach (1) rational.

Dies ist ein Widerspruch zu der Tatsache, dass x irrational sein soll. Daher ist die Annahme falsch.

114 **9** *Wahr oder falsch?*

a) Wahr.

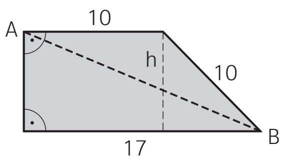
b) Falsch; beim Drachen müssen nicht alle vier Seiten gleich lang sein.

c) Falsch; im gleichschenkligen Trapez sind die Diagonalen gleich lang.

d) Wahr.

e) Falsch; ein Rechteck hat vier rechte Winkel.

10 *Rückwärts rechnen*



$h = \sqrt{10^2 - (17 - 10)^2} = \sqrt{51} \approx 7{,}1$

$\overline{AB} = \sqrt{h^2 + 17^2} = \sqrt{340} \approx 18{,}4$

11 *Etwas zum Nachdenken*

Es soll geprüft werden, ob die Schrankdiagonale d beim schrägen Aufstellen nicht zu hoch ist.

$d = \sqrt{0{,}8^2 + 2{,}3^2} = 0{,}64 + 5{,}29 \approx 2{,}44$

Der Schrank ist also zu hoch für den Raum, falls er schräg aufgestellt werden soll.

12 *Rechtwinkliges Dreieck*

a) Nein, das neue Dreieck ist nicht mehr rechtwinklig.

b) Ja, das neue Dreieck ist rechtwinklig.

13 *Eine besondere Herausforderung*

Raute: Es gilt $\overline{BD} = f$ und $\overline{AE} = 2a$

Im rechtwinkligen Dreieck AEC gilt nach dem Satz des Pythagoras: $e^2 + f^2 = (2a)^2 = 4a^2$

Parallelogramm: Im Dreieck AFC gilt: $e^2 = h^2 + (a + d)^2$

Im Dreieck EBD gilt: $f^2 = h^2 + (a - d)^2$

Addition ergibt: $e^2 + f^2 = 2h^2 + (a + d)^2 + (a - d)^2$

Im Dreieck AED gilt: $h^2 = b^2 - d^2$

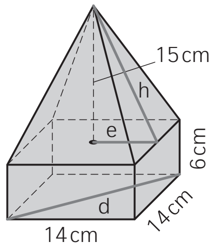
Einsetzen ergibt: $e^2 + f^2 = 2b^2 - 2d^2 + (a + d)^2 + (a - d)^2$

Durch Ausmultiplizieren und Vereinfachen erhält man die angegebene Formel.

114 **14** *Kirchturm*

a) Der gesamte Kirchturm ist 21 m hoch, da zur Pyramidenhöhe noch die Höhe des Quaders dazukommt.

b) Zunächst müssen die Höhe der Dreiecke und die Diagonale d eingezeichnet werden.



Die Höhe h berechnet sich nach dem Satz des Pythagoras aus

$h = \sqrt{(15\,m)^2 + (7\,m)^2} \approx 16{,}6\,m$

Jede Dreiecksfläche berechnet sich mit der Formel $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

Damit gilt für die 4 Dreiecksflächen

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 14\,m \cdot 16{,}6\,m = 116{,}2\,m^2$.

Es ergibt sich daraus eine Gesamtfläche von ca. $464{,}8\,m^2$.

c) Das Volumen einer Pyramide berechnet sich durch $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (14\,m)^2 \cdot 15\,m = 980\,m^3$.

Dazu kommt noch das Volumen des Quaders: $V_2 = (14\,m)^2 \cdot 6\,m = 1176\,m^3$.

Insgesamt hat der obere Teil des Kirchturms ein Volumen von $2156\,m^3$.

15 *Tor für ein Grundstück*

Für alle horizontalen Holzstücke ergibt sich eine Länge von $3 \cdot 3{,}2\,m = 9{,}6\,m$.

Für alle vertikalen Holzstücke ergibt sich eine Länge von $5 \cdot 1{,}6\,m = 8\,m$.

Übrig bleiben noch 8 diagonale Holzstücke. Die Länge einer Diagonalen d ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras aus

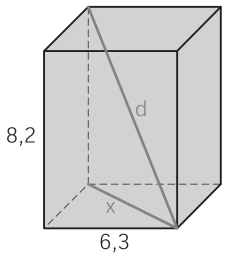
$d = \sqrt{\left(\frac{3{,}2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1{,}6}{2}\right)^2} = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}8^2} = \sqrt{2} \cdot 0{,}8$

Insgesamt werden also $\sqrt{2} \cdot 0{,}8 \cdot 8\,m + 8\,m + 9{,}6\,m \approx 26{,}7\,m$ Holz benötigt.

115 **16** *Die Sache mit dem Strohhalm*

a) Der Strohhalm rutscht in die Packung, weil er nur so lang ist wie die Flächendiagonale der vorderen Packungsfläche. Die Raumdiagonale der Packung ist aber länger.

b)



$x = \sqrt{(4{,}2\,cm)^2 + (6{,}3\,cm)^2} \approx 7{,}57\,cm$

Die Raumdiagonale d ergibt sich als $d = \sqrt{x^2 + (8{,}2\,cm)^2} \approx 11{,}16\,cm$.

Der Strohhalm muss mindestens 11,16 cm lang sein, um nicht in die Packung hinein zu rutschen.

Bei einer Befestigung außen an der Packung würde ein so langer Strohhalm jedoch über den Rand hinausragen.

17 *Suchen in der Wüste*

a) Bis zum Punkt A ist er einen Kilometer gelaufen, bis zum Punkt B drei Kilometer, bis zum Punkt C sechs Kilometer und bis zu Punkt D insgesamt 10 Kilometer.

Entfernung von seinem Wagen W: $\overline{WA} = 1$

$\overline{WB} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}2\,km$

$\overline{WC} = \sqrt{(3-1)^2 + 2^2} = \sqrt{8} \approx 2{,}8\,km$

$\overline{WD} = \sqrt{(4-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} \approx 2{,}8\,km$

b) Bis zum Punkt J muss er insgesamt 55 km laufen.

c) Gerade Strecke vom Wagen bis zu J in km: $\overline{WJ} = \sqrt{5^2 + 6^2} \approx 7{,}8\,km$

18 *Aus Bruchstücken rekonstruieren*

a) $(r-2)^2 + 6^2 = r^2$, also $r = 10$ cm

b) Mit $s = 12\,cm$ und $h = 2\,cm$ erhält man mithilfe der Formel $r = 10\,cm$.

Satz des Pythagoras: $(r-h)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = r^2$

Durch Umformen erhält man die Formel.

115 **19** *Pyramiden aus Draht*

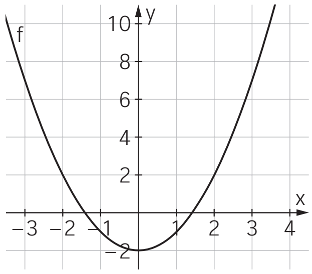
Bei einer quadratischen Grundfläche von $49\,\text{cm}^2$ hat jede Pyramide eine Grundseite von 7 cm. Die Diagonale d der Grundfläche berechnet sich zu $d = \sqrt{2 \cdot (7\,\text{cm})^2} \approx 9{,}90\,\text{cm}$.

Mit der Höhe h der Pyramide bildet die Hälfte dieser Diagonalen nun ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse gerade eine Schrägkante k der Pyramide ist, und es gilt folglich $k = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2} \approx \sqrt{(4{,}95\,\text{cm})^2 + h^2}$. Unter Berücksichtigung des Umfangs der quadratischen Grundfläche von $4 \cdot 7\,\text{cm} = 28\,\text{cm}$ ergibt sich die benötigte Gesamtlänge l des Drahtes mit der allgemeinen Formel $l(h) = 28\,\text{cm} + 4 \cdot \sqrt{(4{,}95\,\text{cm})^2 + h^2}$. Man findet also $l(4\,\text{cm}) \approx 53{,}46\,\text{cm}$ sowie $l(20\,\text{cm}) \approx 110{,}41\,\text{cm}$.

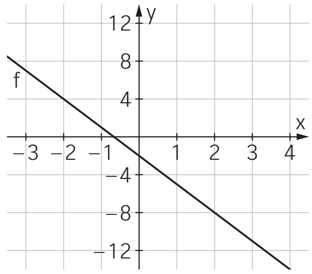
Lösungen zu Kapitel 5

194 **1** *Von der Tabelle zum Graphen zur Funktionsgleichung*

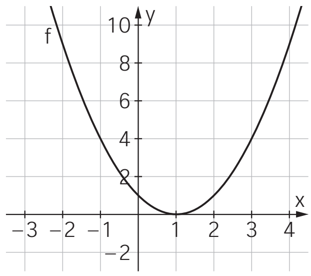
a) Funktion 1:



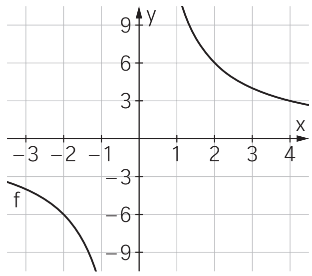
Funktion 2:



Funktion 3:



Funktion 4:



b) Die Funktionen 1 und 3 sind quadratische Funktionen. Bei der Funktion 2 handelt es sich um eine lineare Funktion. Funktion 4 stellt eine antiproportionale Funktion dar.

c) Funktion 1: $y = x^2 - 2$ Funktion 2: $y = -3x - 2$
Funktion 3: $y = x^2 - 2x + 1$ Funktion 4: $y = \frac{12}{x}$

2 *Fragen an drei quadratische Funktionen*

(1) a) P(0|6), Q(−1,73|0), R(1,73|0)
b) P(0|−2,5), Q(−1|0), R(5|0)
c) P(0|1), Q(0,38|0), R(2,61|0)

(2) a) Ja, der Punkt gehört zum Graphen.
b) Nein, der Punkt gehört nicht zum Graphen. Richtig wäre G(11|36).
c) Nein, der Punkt gehört nicht zum Graphen. Richtig wäre G(−4|29).

(3) a) P(−1|4), Q(1|4)
b) P(−2,12|4), Q(6,12|4)
c) P(−0,79|4), Q(3,79|4)

(4) Die Funktionen f und g schneiden sich in den Punkten P(−1,49|1,58) und Q(2,29|−4,46). Die Funktionen f und h schneiden sich in den Punkten R(−0,88|4,44) und S(1,88|−1,1). Es gibt keinen Schnittpunkt zwischen den Funktionen g und h.

3 *Bestimmung und Untersuchung einer Parabel*

a) $y(3) = -3^2 + 2 \cdot 3 = -3$
Der Punkt liegt also nicht auf der Parabel.

b) $y_1 = -8$; $y_2 = -15$

c) $x_1 = 1 \pm \sqrt{3}$; x_2 ist keine reelle Zahl.

4 *Parabeln bewegen*

a) $y = (x-2)^2$ b) $y = (x+1)^2 + 3$ c) $y = 0{,}5x^2 + 4$ d) $y = -x^2$
e) $y = x^2$ f) $y = -x^2 + 1$ g) $y = -x^2 - 1$

194 **5** *Wanted*

1) Da der Scheitelpunkt bekannt ist, verwenden wir zum Aufstellen der Gleichung die Scheitelform: $y = a(x-d)^2 + e$
Der Streckfaktor α ist zunächst unbekannt, während wir die Koordinaten des Scheitels einsetzen können:
$y = a(x+1)^2 + 4$
Da der Punkt $(3|0)$ auf der Parabel liegt, müssen seine Koordinaten die Gleichung erfüllen. Durch Einsetzen können wir also α berechnen: $0 = a(3+1)^2 + 4$
$0 = 16a + 4$
$-4 = 16a$
$a = -\frac{1}{4}$
$y = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + 4$; $N(-5|0)$

2) Da der Scheitelpunkt bekannt ist, verwenden wir zum Aufstellen der Gleichung die Scheitelform: $y = a(x-x_s)^2 + y_s$
Der Streckfaktor α ist zunächst unbekannt, während wir die Koordinaten des Scheitels einsetzen können:
$y = a(x-2)^2 + 4$
Da der Punkt $(5|-1)$ auf der Parabel liegt, müssen seine Koordinaten die Gleichung erfüllen. Durch Einsetzen können wir also α berechnen: $-1 = a(5-2)^2 + 4$
$-1 = 9a + 4$
$-5 = 9a$
$a = -\frac{5}{9}$
$y = -\frac{5}{9}(x-2)^2 + 4$; $P(3|3{,}44)$

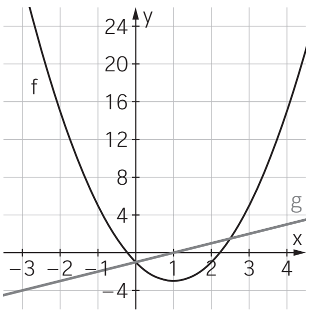
3) Einsetzen der Koordinaten in die allgemeine Form einer Parabel ergibt die Funktionsgleichung $y = 0{,}5x^2 + 3x + 2$

4) $y = (x+3)\cdot(x-6)$
Der Scheitel liegt bei $S(1{,}5|-20{,}25)$.

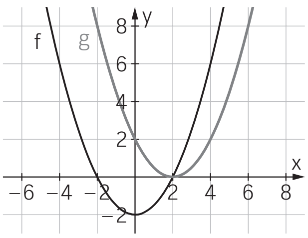
195 **6** *Vom Graph zur Funktionsgleichung*

(1) $y = 0{,}5x^2 - x - 4$ (2) $y = 0{,}5x + 2$ (3) $y = 0{,}5(x-2)^2$ (4) $y = -2x^2 + 1$ (5) $y = -2x + 4$

7 *Funktionen und Gleichungen*

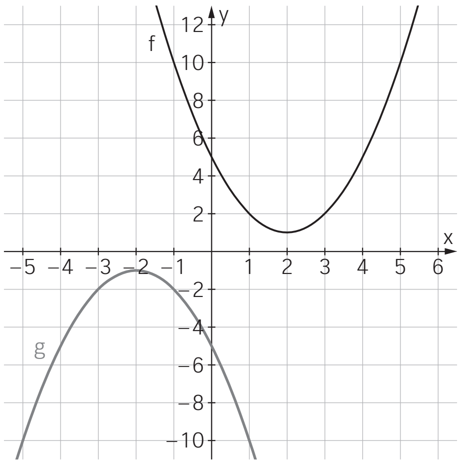
a)


2 Schnittpunkte: $S(0|-1)$, $S(2{,}5|1{,}5)$

b)


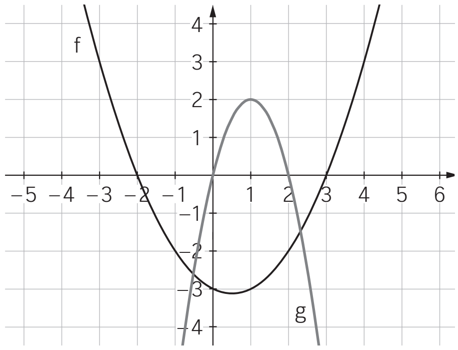
1 Schnittpunkt: $S(2|0)$

195 **7** c)



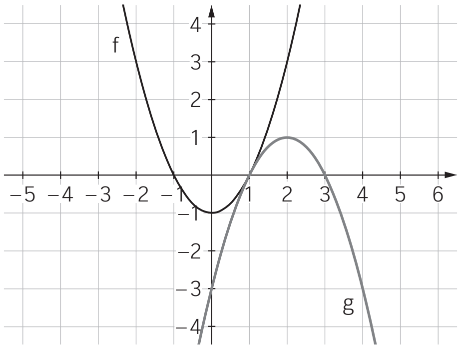
Kein Schnittpunkt

d)



2 Schnittpunkte: S(−0,5|−2,6), S(2,3|−1,5)

e)



1 Berührpunkt: S(1|1)

8 *Grafisches Lösen von quadratischen Gleichungen*

a) $-x^2 = x - 2$

b) $x^2 - 4x + 5 = 3$

c) $y_1 = 0{,}5x^2 = 3x + 1$
Ein weiterer Schnittpunkt liegt bei S(6,3|19,9).

9 *Training im rechnerischen Lösen von Gleichungen*

a) $x = \pm 3$
b) keine Lösung
c) $x = 2$
d $x_1 = -7;\ x_2 = 0$
e) $x_1 = 5{,}32;\ x_2 = -1{,}32$
f) $x = \pm 2$
g) $x_1 = 1$
h) $x_1 = 0{,}5;\ x_2 = -4$
i) $x_1 = 4{,}5;\ x_2 = 0$
j) $x_1 = 2{,}12;\ x_2 = -2{,}12$
k) keine Lösung
l) keine Lösung

195

10 *Nullstellen und Schnittpunkte*

a) Nullstellen: $x_1 = -2{,}24$; $x_2 = 2{,}24$
b) Nullstellen: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$
c) Nullstellen: $x_1 = -0{,}41$; $x_2 = 2{,}41$
Die Funktionen f und g schneiden sich in P(−3,83 | 9,66) und Q(1,82 | −1,66).
R(−1,30 | −3,20) und S(2,30 | 0,30) sind Schnittpunkte der Funktionen f und h.
Die Funktionen g und h schneiden sich in (−0,15 | −1,33) und (2,15 | −1,33).

11 *Funktionenzoo*

Proportional:	–
Antiproportional:	f(x)
Linear:	g(x), d(x), j(x), i(x)
Konstant:	–
Quadratisch:	a(x), c(x), h(x)
Etwas anderes:	e(x), b(x)

196

12 *Behauptungen*

a) Aus negativen Zahlen kann man (noch) keine Wurzel ziehen. Wenn k jedoch eine negative Zahl ist, wird die Wurzel aus einer positiven Zahl gezogen und es ergibt sich hier kein Problem.
b) Wenn beide Parabeln gegeneinander nur entlang der x-Achse verschoben sind, stimmt die Behauptung. Bei Verschiebung in Richtung der y-Achse stimmt die Behauptung nicht.
c) Maren hat Recht. Mit der pq-Formel gilt: $x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
Unter den genannten Voraussetzungen ist der Ausdruck unter der Wurzel positiv. Daher gibt es zwei Nullstellen.
Im Falle $b^2 - 4ac = 0$, also $b^2 = 4ac$ gibt es genau eine Lösung.
Im Falle $b^2 - 4ac < 0$, also $b^2 < 4ac$ gibt es keine Lösung.

13 *„Wer ist die Schönste im Land?“*

Jakob: Die faktorisierte Form ist am schönsten, weil sich sofort die Nullstellen der Funktion ablesen lassen, wie bei g(x) (Nullstellen: −2 und 4).
Ole: Die Scheitelpunktform ist am schönsten, weil der Scheitelpunkt und der Streckfaktor direkt fürs Zeichnen ablesbar sind (f(x) hat den Scheitelpunkt S(−1 | −4) und den Streckfaktor 2).
Benny: Die allgemeine Form ist am schönsten, weil sich die Mitternachtsformel oder pq-Formel darauf anwenden lässt, wie z. B. bei h(x). Zusätzlich kann man sofort den Grad der Gleichung und den y-Achsenabschnitt ablesen.
Oles letzter Satz: Hat die Parabel keine Nullstellen, so gibt es keine faktorisierte Form.

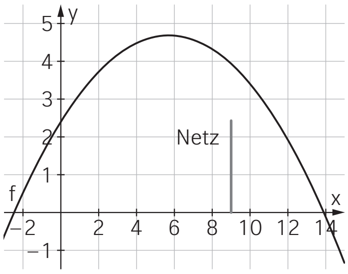
14 *Tangenten an Parabeln*

a) Es gibt jeweils nur einen gemeinsamen Punkt, also handelt es sich jeweils um Tangenten.
(1) B(1 | 1) (2) B(−2 | 8) (3) B(3 | 0)
b) Die Berechnung eines Berührpunkts führt immer auf eine quadratische Gleichung, die genau eine Lösung besitzt (der Wurzelteil in der pq- Formel wird Null).
Tangente $y = 4x - 7$. Berührpunkt ist hier B(2 | 1).
Ein Beispiel für eine weitere Tangente ist $y = 6x - 12$. Berührpunkt ist dann (3 | 6).

15 *Eine Brücke*

y(0) = 60. Die Aufhängung hat also eine Höhe von 60 m.
Es ist y(x) = 60 für x = 0 und x = 300. Das Straßenstück ist also 300 m lang.
Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten S(150 | 10). Der Bogen hängt also minimal 10 m über der Fahrbahn.

16 *Ein Volleyballaufschlag*

a)


b) Der Ball wird in einer Höhe von 2,4 m abgeschlagen, denn y(0) = 2,4. Er fliegt in einer Höhe von 3,93 m über das Netz, denn y(9) = 3,93. Er landet bei 13,89 m, also noch im Feld, denn y(x) = 0 für x = 13,89.
Der Scheitelpunkt S(5,71 | 4,68) liegt unterhalb der Deckenhöhe.

197 **17** *Einwurf und Freistoß beim Fußball*

a)

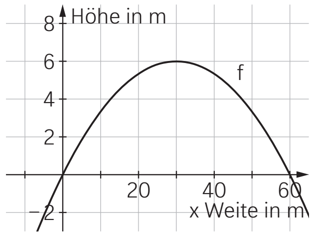
x	0	1	2	4	6	8	10	11
y	2	2,9	3,6	4,4	4,4	3,6	2,0	0,9

$y(x) = 0$ für $x_1 = 5 - 3\sqrt{5} \approx -1{,}7$; $x_2 = 5 + 3\sqrt{5} \approx 11{,}7$

$y(5) = 4{,}5$

Der Ball hat in 5 m Entfernung mit 4,5 m Höhe den höchsten Punkt erreicht. Danach senkt sich der Ball und schlägt in 11,7 m Entfernung auf dem Boden auf. Er wurde in 2 m Höhe abgeworfen.

b)



Der Scheitelpunkt muss aus Symmetriegründen die Koordinaten S(30/6) haben. Die passende Funktionsgleichung ist (3): $f(x) = -\frac{1}{150}x^2 + \frac{2}{5}x$, hier stimmen Weite und Maximalhöhe mit den Vorgaben überein.

18 *Gewinn*

a) Welches ist der Höchstpreis, mit dem noch Gewinn erwirtschaftet werden kann?
Bei welchem Verkaufspreis kann der höchste Gewinn erzielt werden?

b) Mögliche Stichpunkte:
- Im Graphen ist der Gewinn y in Abhängigkeit vom Verkaufspreis x des Produktes dargestellt
- Die x-Achse hat für dieses Beispiel nur positive Werte, da der Produktpreis größer als Null sein muss.
- Ab einem Verkaufspreis von 85 Euro kann kein Gewinn mehr erzielt werden.
- Der höchste Gewinn wird bei einem Verkaufspreis von 42,50 € erzielt.

19 *Sturz vom Fahrrad*

a) $5t^2 = 1{,}8$; $t_1 = 0{,}6$; $t_2 = -0{,}6$ Der Kopf schlägt nach etwa 0,6 s auf.

b) $v(0{,}6) = 6$
Der Kopf schlägt mit etwa $6\,\frac{m}{s}$ auf den Boden.

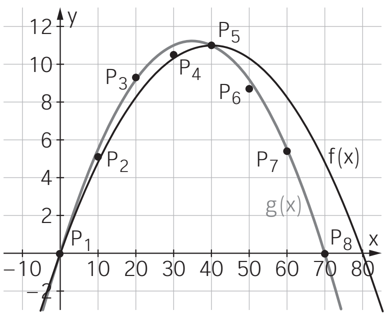
c) Dies entspricht einer Fallhöhe von ca 1,5 m.

20 *Hammerwerfen*

Ansatz 1: Nullstellen sind 0 und 70, also wählt man als Ansatz die Funktion $f(x) = a \cdot x \cdot (x - 70)$ in faktorisierter Form.
Es soll $f(40) = 11$ gelten, also muss man hier $a = \frac{11}{1200}$ wählen.

Ansatz 2: Höchster Punkt ist der Scheitelpunkt $S(40|11)$, also wählt man als Ansatz die Funktion $g(x) = a \cdot (x - 40)^2 + 11$ in Scheitelpunktform.
Es soll $g(0) = 0$ gelten, also muss man hier $a = -\frac{11}{1600}$ wählen.

Vergleicht man die beiden Ansätze (siehe Grafik), so stellt man fest, dass Ansatz 1 hier ein deutlich besseres Ergebnis liefert als Ansatz 2.



Lösungen zu Kapitel 6

220 **1** *Kreisgrößen*

r	3 cm	1,59 cm	4,48 cm	9,3 m	7,16 dm	0,74 cm
U	18,85 cm	10 cm	28,14 cm	58,43 cm	45 dm	4,62 cm
A	28,27 cm²	7,94 cm²	63 cm²	271,72 m²	161,06 dm²	1,7 cm²

220 **2** *Flächeninhalt und Umfang von Figuren*

Die gefärbten Flächen der Abbildungen (3) und (5) haben den kleinsten Flächeninhalt mit $A = 1{,}93\,cm^2$.
Die gefärbte Fläche der Abbildung (1) hat den größten Flächeninhalt mit $A = 6{,}28\,cm^2$.
Die gefärbten Flächen der Abbildung (3) und (4) hat den kleinsten Umfang mit $U = 9{,}42\,cm$.
Die gefärbte Fläche der Abbildung (2) hat den größten Umfang mit $U = 13\,cm$.

3 *Kreis und Quadrat*

a) $a = 3{,}57\,cm$
b) $U_{Quadrat} = 24\,cm$; $U_{Kreis} = 21{,}27\,cm$

4 *Gleicher Umfang – unterschiedliche Flächeninhalte*

Das Dreieck besitzt einen Flächeninhalt von $249{,}42\,cm^2$, das Quadrat einen von $324\,cm^2$, das Sechseck einen von $374{,}12\,cm^2$ und der Kreis einen von $412{,}59\,cm^2$.

5 *Kreisring*

Der Ring ist 2 cm breit.
Es ist nicht möglich einen Ring mit dem angegebenen Flächeninhalt nach innen zu legen.

6 *Kreisfiguren*

(1) $U = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 1{,}5\,cm + 8 \cdot 1{,}5\,cm = 16{,}71\,cm$; $A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (1{,}5\,cm)^2 = 3{,}53\,cm^2$
(2) $U = 2 \cdot 3\,cm + 2 \cdot 1\,cm + 2 \cdot 2\,cm + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot 2\,cm = 14{,}09\,cm$; $A = 3\,cm \cdot 3\,cm - 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot (2\,cm)^2 = 6{,}91\,cm$
(3) $U = 2 \cdot 3\,cm + \frac{2}{15} \cdot 2\pi \cdot 8\,cm + \frac{2}{15} \cdot 2\pi \cdot 5\,cm = 16{,}89\,cm$; $A = \frac{2}{15} \cdot \left(\pi \cdot (8\,cm)^2 - \pi \cdot (5\,cm)^2\right) = 16{,}34\,cm^2$

7 *Gradmaß und Bogenmaß*

$\frac{2\pi}{3} = 120°$; $1{,}5\pi = 270°$; $0{,}3\pi = 54°$; $\frac{\pi}{12} = 15°$; $1{,}57 = 90°$; $\frac{10}{9}\pi = 200°$

221 **8** *Was passiert mit dem Umfang oder Flächeninhalt eines Kreises, wenn …*

Für den Umfang muss der Radius halbiert (verdreifacht, verfünffacht) werden.
Für den Flächeninhalt muss der Radius verdoppelt (vervierfacht, die Wurzel aus a gezogen) werden.

9 *Wachsende Kreisringe*

$A = \pi\left(r_n^2 - r_{n-1}^2\right)$ mit r_n ist Radius des äußeren Kreisbogens und r_{n-1} ist Radius des inneren Kreises.
$r_n = n \cdot r$ und $r_{n-1} = (n-1) \cdot r$
Flächeninhalt des neunten Rings: $A = \pi\left((9r)^2 - (8r)^2\right)$

10 *Was passiert, wenn …*

a) Nach drei Schritten: 2,75 dm
Nach fünf Schritten: 3,04 dm
Nach zehn Schritten: 3,14 dm
b) $A = \frac{1}{2}\pi\left(r^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{16} + \ldots\right)$

11 *Eine andere Formel für den Kreisausschnitt*

a) Die Bogenlänge berechnet sich via $b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot r$.
Der Flächinhalt des Kreisausschnitts ist $A = \frac{\alpha}{360°}\pi \cdot r^2$, also gilt $A = \frac{1}{2} b \cdot r$.
b) Für den Flächeninhalt des Vollkreises gilt ebenso: $A = \frac{1}{2} b \cdot r$, wobei $\alpha = 360°$ ist und daher $b = 2\pi \cdot r$.
Hiermit erhält man also die übliche Formel $A = \pi \cdot r^2$.
c) Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit Grundseite g und Höhe h berechnet sich mit der Formel $A = \frac{1}{2} g \cdot h$.
In beiden Fällen ist also die Struktur der Formel gleich.

12 *Pizza*

Kleine Pizza: $A = 380{,}13\,cm^2$ kostet 5 €.
Große Pizza: $A = 1520{,}53\,cm^2$, Stück: $A = 126{,}71\,cm^2$ kostet 2 €.
Drei Stücke der großen Pizza entsprechen einer kleinen Pizza. Das heißt die drei Stücke sind teurer, da sie insgesamt 6 € kosten, als die kleine Pizza, die bei gleicher Größe nur 5 € kostet.

13 *Defekte Scheibe*

$A_\alpha = \frac{\pi}{360°} \cdot 20° \cdot (1{,}5\,m)^2 = 0{,}39\,m^2$
$A_\alpha - \frac{\pi}{360°} \cdot 20° \cdot (1{,}5\,m - 0{,}47\,m)^2 = 0{,}208\ m^2$
Die neue Scheibe kostet 186,99 €.

221 **14** *Erdbeben*
Eine Meile entspricht etwa 1,61 km. Dementsprechend beträgt die Kreisfläche:
$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (80 \cdot 1{,}61\,\text{km})^2 = 52117\,\text{km}^2$.

15 *Eine Buche*
Zunächst berechnen wir durch Umstellung der Formel $U = 2\pi \cdot r$ die jeweiligen Radien des Stammes:
$r_1 = \frac{1{,}14\,\text{m}}{2\pi} = 18{,}1\,\text{cm}$; $r_2 = \frac{1{,}28\,\text{m}}{2\pi} = 20{,}4\,\text{cm}$. Es ist $d_1 = 2 \cdot r_1 = 36{,}2\,\text{cm}$; $r_2 = 2 \cdot r_2 = 40{,}8\,\text{cm}$,
also ist der Durchmesser des Stammes um etwa $\frac{40{,}8 - 36{,}2}{36{,}2} = \frac{4{,}6}{36{,}2} = 0{,}127 = 12{,}7\,\%$ gewachsen. Für die Querschnittsfläche des Stammes gilt: $A_1 = \pi r_1^2 = 1029\,\text{cm}^2$; $A_2 = \pi r_2^2 = 1307{,}41\,\text{cm}^2$, also ist diese um etwa 27 % gewachsen.

Lösungen zu Kapitel 7

243 **1** *Seitenverhältnisse*
$\sin(\alpha) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$; $\cos(\alpha) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$; $\tan(\alpha) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$
$\sin(\beta) = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$; $\cos(\beta) = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$; $\tan(\beta) = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$
$\sin(\delta) = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$; $\cos(\delta) = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$; $\tan(\delta) = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$
$\sin(\varepsilon) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$; $\cos(\varepsilon) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$; $\tan(\varepsilon) = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$

2 *Sinus, Kosinus und Tangens*
Taschenrechnerwerte, auf zwei Nachkommastellen gerundet:
$\sin(5°) \approx 0{,}09$; $\cos(5°) \approx 1{,}00$; $\tan(5°) \approx 0{,}09$
$\sin(32°) \approx 0{,}53$; $\cos(32°) \approx 0{,}85$; $\tan(32°) \approx 0{,}62$
$\sin(60°) \approx 0{,}87$; $\cos(60°) = 0{,}5$; $\tan(60°) \approx 1{,}73$
$\sin(85°) \approx 1{,}00$; $\cos(85°) \approx 0{,}09$; $\tan(85°) \approx 11{,}43$

3 *Winkel gesucht*
a) $\gamma < \varepsilon < \alpha < \beta < \delta$
Es gilt für $0° \le \alpha \le 90°$: Je größer der Sinus-Wert, desto größer auch der dazugehörige Winkel.
b) $\gamma \approx 4°$; $\varepsilon = 30°$; $\alpha \approx 32°$; $\beta \approx 76°$; $\delta \approx 82°$

243 **4** *Unvollständige Angaben*
a) $a = \frac{20\,\text{cm}}{\tan(30°)} \approx 34{,}64\,\text{cm}$
b) $\delta = \tan^{-1}\left(\frac{10{,}7\,\text{cm}}{12{,}8\,\text{cm}}\right) \approx 39{,}89°$
c) Für die kurze Seite a ergibt sich $a = 85\,\text{cm} \cdot \sin(35°) \approx 48{,}75\,\text{cm}$
Für die lange Seite b ergibt sich $b = 85\,\text{cm} \cdot \cos(35°) \approx 69{,}63\,\text{cm}$
Für den Umfang ergibt sich dann mit $U = 2 \cdot (a + b) \approx 2 \cdot (48{,}75\,\text{cm} + 69{,}63\,\text{cm}) = 236{,}76\,\text{cm}$
d) Sei g die Grundseite im gestrichelt dargestellten Dreieck.
Dann gilt: $x + g = \frac{280\,\text{cm}}{\tan(55°)} \approx 196{,}06\,\text{cm}$ $\quad g = \frac{280\,\text{cm}}{\tan(75°)} \approx 75{,}03\,\text{cm}$
Damit ergibt sich für x: $x \approx 196\,\text{cm} - 75\,\text{cm} = 121\,\text{cm}$.

5 *Gleichungen mit vielen Lösungen*

$\sin(\alpha) = 0$	für $\alpha = 0°, 180°, 360°$	$\sin(\alpha) = 0{,}5$	für $\alpha = 30°, 150°$
$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	für $\alpha = 60°, 120°$	$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	für $\alpha = 45°, 135°$
$\sin(\alpha) = \frac{1}{4}$	für $\alpha = 14{,}32°, 165{,}56°$.		

6 *Steigung oder Gefälle*
Die Steigung berechnet man jeweils mit der Formel $m = \tan(\alpha)$, der y-Achsenabschnitt kann dann beliebig gewählt werden.
a) $f(x) = 0{,}6x + 1$, $g(x) = 0{,}6x$; Steigung: 60 %
b) $f(x) = -x + 2$, $g(x) = -x$; Gefälle: 100 %
c) $f(x) = 0{,}9x - 1$, $g(x) = 0{,}9x$; Steigung: 90 %
d) $f(x) = -0{,}7x + 3$, $g(x) = -0{,}7x$; Gefälle: 70 %
e) $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 2x$; Steigung: 200 %
f) $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = 4x$ Steigung: 400 %

243 **7** *Konstruieren und rechnen*

a) $c \approx 9{,}0\,\text{cm}$, $\alpha \approx 31{,}4°$, $\beta \approx 38{,}6°$
b) $a \approx 3{,}4\,\text{cm}$, $c \approx 4{,}3\,\text{cm}$, $\alpha = 48°$
c) $b \approx 4{,}8\,\text{cm}$, $\beta \approx 36{,}7°$, $\gamma \approx 48{,}3°$
d) $b \approx 3{,}5\,\text{cm}$, $\alpha \approx 43{,}3°$, $\gamma \approx 101{,}7°$

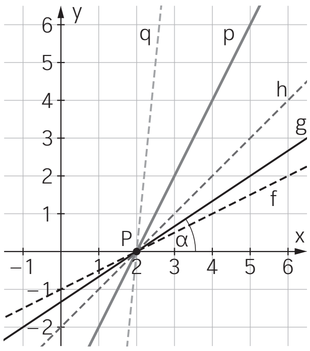
244 **8** *Klar ohne Taschenrechner*

$\cos(0°) = 1$ (Begründung mit dem Einheitskreis)
$\sin(43°) - \cos(47°) = 0$ $\left(\text{Symmetrie zum 45°-Winkel bzw. die Überlegung } \cos(47°) = \cos(90° - 43°) = \sin(43°)\right)$
$\sin^{-1}(0{,}5) = 30°$, da $\sin(30°) = 0{,}5$
$\sin(45°) + \cos(45°) = \sqrt{2}$ wegen $\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

9 *Die Steigung und der Steigungswinkel*

a) Die Steigung m beträgt $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6} = 66{,}\overline{6}\,\%$. Für den Steigungswinkel gilt: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33{,}69°$.

b)



Der Steigungswinkel ist der Winkel zwischen der Steigungsgeraden und der Horizontalen an. Bei der Steigung in Prozent gibt man an, um wie viel Einheiten die Steigungsgerade auf einer horizontalen Länge von 100 Einheiten gestiegen ist. Es gilt für die Steigung einer Geraden: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Zuordnung:
m (rot) = 100 % (Steigungswinkel von 45°),
m (grün) = 50 % (Steigungswinkel von ca. 26,6°),
m (lila) = 200 % (Steigungswinkel von ca. 63,4°) und
m (orange) = 1000 % (Steigungswinkel von ca. 84,3°).

c) Weil $\Delta x = 0$ gilt, ist die Steigung nicht definiert. Anschaulich kann man von „unendlich großer" Steigung reden.

10 *Aus einem Aufnahmetest*

a) Richtig, da die Gegenkathete im Vergleich zur Hypotenuse (die im Einheitskreis einen konstanten Wert 1 hat) dann ebenfalls immer kleiner wird. Nähert sich die Winkelgröße dem Wert Null, so wird die Ankathete fast so lang wie die Hypotenuse, die Länge der Gegenkathete wird dann nahezu gleich Null. Für $\alpha = 0°$ fallen die Hypotenuse und die Ankathete zusammen, das rechtwinklige Dreieck existiert nicht mehr. Die Werte $\sin(0°) = 0$ und $\sin(90°) = 1$ ergeben sich, wenn man den Begriff des Sinus nicht weiter als ein Längenverhältnis in einem rechtwinkligen Dreieck auffasst, sondern allgemein als die y-Koordinate eines Punktes, der je nach dem Winkel αauf dem Einheitskreis wandert.
b) Falsch, der Sinus wird in diesem Fall immer kleiner und erreicht bei 180° den Wert Null.
c) Falsch, da $\sin(90°) = 1$, während $\sin(270°) = -1$ beträgt.
d) Richtig, da die Funktionswerte periodisch zwischen –1 und 1 schwanken.
e) Richtig, bei $\alpha = 45°$ und bei $\alpha = 225°$ ist $\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$.

11 *Wenn der Punkt C wandert – Mathematik ohne Worte*

a) Zunächst wird die Situation für ein rechtwinkliges Dreieck gezeigt – hier gilt der Satz des Pythagoras, also $a^2 + b^2 = c^2$. Mit Variation des Winkels variiert auch das Verhältnis der Flächeninhalte zueinander. Bei Verkleinerung des Winkels nimmt der Flächeninhalt der beiden ursprünglichen Kathetenquadrate zu, bei Vergrößerung des Winkels entsprechend ab.
b) Die Veränderungen erfolgen gemäß Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$. Im ersten Falle gilt wegen $\gamma = 90°$ der Satz des Pythagoras, im zweiten Falle gilt $100 = 2 \cdot 54{,}52 - 2 \cdot (7{,}38)^2 \cdot \cos(85{,}25°)$, im letzten Falle $100 = 2 \cdot 37{,}28 - 2 \cdot (6{,}11)^2 \cdot \cos(109{,}96°)$.

244 **12** *Sinus und Kosinus*

Bei einem spitzwinkligen Dreieck liegen alle Winkel zwischen 0° und 90°, dementsprechend sind für den Sinus und für den Kosinus alle Werte im offenen Intervall $(0, 1)$ möglich $\left(\text{siehe Verlauf der beiden Funktionen auf dem Intervall } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$.
Ein stumpfwinkliges Dreieck enthält einen Winkel zwischen 90° und 180°, die anderen Winkel nehmen Werte zwischen 0° und 90° an, daher sind für den Sinus alle Werte aus dem Intervall $(0, 1)$ und für den Kosinus alle Werte aus dem Intervall $(-1, 1)$ möglich (siehe Verlauf der beiden Funktionen auf dem Intervall $(0, \pi)$).

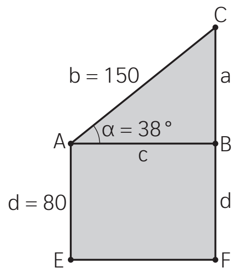
13 *Aus einem Aufnahmetest*

a) $f(x) = 2x + 3$, bzw. $f(x) = 0{,}5x$

b) nicht möglich, bzw. $f(x) = 0{,}53x$
Bei $f(x) = x + 3$ lässt sich der Steigungswinkel nicht verdoppeln, da dies 90° entspräche und damit eine Gerade mit unendlicher Steigung entstünde.

245 **14** *Fensterglas*

a) Aus der Abbildung ergibt sich für die Glasfläche (A_1 = Dreieck, A_2 = Rechteck):
$A_{Glas} = A_1 + A_2$
$A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c = \frac{1}{2} \cdot (150 \cdot \sin(38°)) \cdot (150 \cdot \cos(38°)) \approx 5457{,}91\,\text{cm}^2$
$A_2 = d \cdot c = 80 \cdot (150 \cdot \cos(38°)) \approx 9456{,}13\,\text{cm}^2$
$A \approx 14\,914{,}04\,\text{cm}^2$
Die Glasfläche beträgt also ca. $1{,}49\,\text{m}^2$.



b) Es kommt darauf an, welche Angaben aus der Teilaufgabe a) weiterhin gelten.
Für $d = 80\,\text{cm}$, $b = 150\,\text{cm}$, $\alpha = 28°$ wird die Glasfläche um ca. 2,3 % größer als in der Teilaufgabe a):
$A_1 \approx 4663{,}33\,\text{cm}^2$, $A_2 \approx 10\,595{,}37\,\text{cm}^2$, $A \approx 15\,258{,}71\,\text{cm}^2$.
Für $d = 80\,\text{cm}$, $\alpha = 28°$, $c = 150 \cdot \cos(38)\,\text{cm} \approx 118{,}20\,\text{cm}$ bleibt der Flächeninhalt des Rechtecks AEFB unverändert, das Dreieck ABC wird jedoch kleiner.
Es gilt dann: $a = 118{,}2 \cdot \tan(28°) \approx 68{,}85\,\text{cm}$ sowie $A_1 \approx 3714{,}42\,\text{cm}^2$, $A_2 \approx 9456{,}13\,\text{cm}^2$, $A \approx 13\,170{,}55\,\text{cm}^2$.
Die Glasfläche wird dann um 11,7 % kleiner als in der Teilaufgabe a).

15 *Skipiste*

Die Steigung beträgt rund 104 Prozent: $\tan(46°) \approx 1{,}04 = 104\,\%$. In der Zeichnung stellt die Hypotenuse die Skiabfahrt dar (Länge: ca. 14,4 cm), die Ankathete hat eine Länge von 10 cm, die Gegenkathete eine Länge von ca. 10,4 cm.

16 *Berggipfel*

Der Höhenunterschied a zwischen den beiden Berggipfeln beträgt $a = \tan(8°) \cdot 3500\,\text{m} \approx 492\,\text{m}$
Der kleine Berg ist also ca. $2680\,\text{m} - 492\,\text{m} = 2188\,\text{m}$ hoch.

17 *Messen im Gelände*

Nach dem Sinussatz gilt $\frac{\sin(48°)}{\overline{PB}} = \frac{\sin(76°)}{620\,\text{m}}$, also ist $\overline{PB} = 474{,}9\,\text{m}$.
Mit dem Kosinussatz erhält man dann $\overline{AB}^2 = 712\,\text{m}^2 + 474{,}9\,\text{m}^2 - 2 \cdot 712\,\text{m} \cdot 474{,}9\,\text{m} \cdot \cos(91°)$,
daraus folgt $\overline{AB} = 862{,}71\,\text{m}$.

18 *Gleitflug: Drachenflieger*

a) $\tan(\alpha) = \frac{h}{l}$, also ist die Flugweite $l = \frac{h}{\tan(\alpha)} = \frac{85\,\text{m}}{\tan(8°)} = 604{,}8\,\text{m}$

b) Er müsste aus einer Höhe $h = l \tan(\alpha) = 604{,}8\,\text{m} \cdot \tan(7°) = 74{,}26\,\text{m}$ starten.

c) Die Gleitstrecke lässt sich berechnen via $g = \frac{h}{\sin(\alpha)}$.
Im ersten Falle ist die Gleitstrecke $g = 610{,}8\,\text{m}$, im zweiten Falle 609,3 m.

19 *Entfernung Erde – Sonne*

Die Entfernung Erde – Sonne entspricht der Hypotenuse des entstehenden Dreiecks.
Für die Hypotenuse H ergibt sich dann $H = \frac{384\,400\,\text{km}}{\cos(89{,}96°)} \approx 157\,317\,996{,}9\,\text{km}$.
Ein Fehler von 0,2° bei der Winkelmessung ergibt einen Längenunterschied in der Distanz Sonne – Erde von
$157\,317\,966{,}9\,\text{km} - 64\,778\,314{,}4\,\text{km} = 92\,539\,682{,}4\,\text{km}$.
Das ist eine Änderung um ca. 58,8 %.